



الإمتحان السداسي الثاني في مقياس التحليل العددي 2

سنة ثالثة هندسة كهربائية

المدة: ساعتان

قسم: تكنولوجيا

التمرين الأول (04,5 نقاط):

لنعتبر النظام غير الخطي:

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0 \\ f_2(x) = x_1^4 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

و المعرفة على المجموعة: $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0,25 \leq x_1 \leq 1,2; 0,5 \leq x_2 \leq 1,5\}$
نقترح الصيغتين التكراريتين (أ) و (ب) المعرفتين كيلي:

$$(ب) \begin{cases} g_1(x) = x_2^{\frac{1}{4}} \\ g_2(x) = \sqrt{\frac{x_1 + 1}{2}} \end{cases} \quad (أ) \begin{cases} g_1(x) = 2x_2^2 - 1 \\ g_2(x) = x_1^4 \end{cases}$$

(1) هل في كل حالة $G(D) \subset D$ ؟، حيث: $G(x) = [g_1(x); g_2(x)]^T$

(2) في أي من الحالتين (أ) و (ب) تكون الصيغة التكرارية $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ متقاربة.

(3) أوجد الحل التقريبي الأول (بالتقريب إلى 10^{-4}) للنظام (1)، علما أن: $X^{(0)} = [1, 2; 1, 5]^T$

التمرين الثاني (5 نقاط):

لتكن مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = -y + t(t+2), \quad h = 0, 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

(1) أحسب القيم الابتدائية y_i ، $i = 1, 2, 3$ باستعمال طريقة أولر للمسألة (2).

(2) أستخدم طريقة المتنبئ-المصحح وذلك باعتبار طريقة أدمز-باشفورث من الرتبة 4 بمنزلة المتنبئ و طريقة أدمز-مولتن من الرتبة 3 بمنزلة المصحح، لايجاد الحل التقريبي w_4 (بالتقريب إلى 10^{-6}).

(3) أحسب الخطأ الفعلي عند اللحظة $t = 0.4$ ، علما أن الحل الصحيح هو: $y(t) = t^2 + e^{-t}$

التمرين الثالث (5 نقاط)

لتكن مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = y + t, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad h = 0, 1 \end{cases} \quad (3)$$

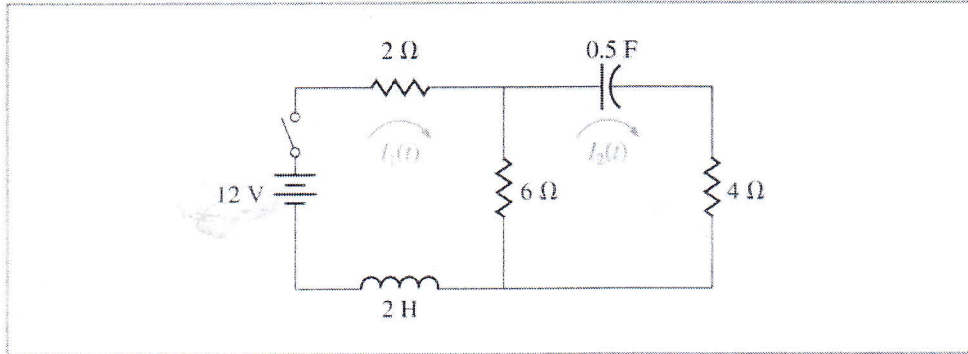
- (1) بين أن مسألة كوشي (3) تقبل حلا وحيدا.
 - (2) أستخدم طريقة أولر لتقريب الحل $w_i, i = 1, 2, 3$.
 - (3) أحسب الخطأ الفعلي عند اللحظة $t = 0,2$ (بالتقريب إلى 10^{-6})، علما أن الحل الدقيق هو: $y = 2e^t - t - 1$.
 - (4) أحسب الخطأ النظري عند اللحظة $t = 0,2$ (بالتقريب إلى 10^{-6})، ثم قارن بينهما.
- التمرين الرابع (05,5 نقاط):

إن قانون كيرشوف (Kirchhoff's) ينص على أن مجموع كل التغيرات اللحظية في الجهد (فرق الكمون) حول دائرة كهربائية مغلقة يساوي صفرا. ويؤدي هذا القانون إلى أن التيار الكهربائي $I(t)$ في دائرة مغلقة تحتوي على مقاومة مقدارها R (ohms) ومكثفة سعتها C (Farads) ووشية ذاتيتها L (Henry) ومصدر الجهد (فرق الكمون) مقداره $E(t)$ يحقق المعادلة:

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt = E(t)$$

إن التيارين $I_1(t)$ و $I_2(t)$ في الدائرتين اليسرى واليمنى على التوالي في الدارة المبينة في الشكل 6.5 هما الحل للجملة:

$$\begin{cases} 2I_1(t) + 6[I_1(t) - I_2(t)] + 2I_1'(t) = 12 \\ \frac{1}{0,5} \int I_2(t) dt + 4I_2(t) + 6[I_2(t) - I_1(t)] = 0 \end{cases} \quad (4)$$



شكل 6.5

- نفرض أن عند اللحظة $t = 0$: $I_1(0) = 0$ و $I_2(0) = 0$.
- (1) أوجد الدالتين $F_1(t, I_1, I_2)$ و $F_2(t, I_1, I_2)$ المتعلقتين بالجملة (4).
 - (2) باستعمال طريقة رونج كوتا من الرتبة 4 (RK4) أحسب التكرار الأول لشدة التيار الكهربائي التقريبي $w_{1,1}$ و $w_{2,1}$ مع $h = 0,1$.

بالتوفيق

تصحيح الامتحان السادس 2
في مقاييس التحويل العددي 2

حل القمين: $(0,4,5) / (0,4,5)$

$$\begin{cases} f_1(u) = u_1 - 2u_2^2 + 1 = 0 \\ f_2(u) = u_1^4 - u_2 = 0 \end{cases}$$

$$G(u) = \begin{pmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \end{pmatrix}$$

$$D = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : 0,25 \leq u_1 \leq 1,2 ; 0,5 \leq u_2 \leq 1,5\}$$

الحالة (أ):

$$G(D) = D \Leftrightarrow 0,25 \leq g_1(u) \leq 1,2 \text{ و } 0,5 \leq g_2(u) \leq 1,5$$

$$\begin{aligned} \bullet (0,5) \leq u_2 \leq (1,5) &\Leftrightarrow (0,5)^2 \leq u_2^2 \leq (1,5)^2 \Leftrightarrow 2(0,5)^2 \leq 2u_2^2 \leq 2(1,5)^2 \\ &\Leftrightarrow 2(0,5)^2 - 1 \leq 2u_2^2 - 1 \leq 2(1,5)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (-0,5) \leq g_1(u) \leq 3,5$$

$$g_1(u) \notin [0,25 ; 1,2] \quad \text{أي :}$$

$$G(D) \not\subset D \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\bullet (0,5) \leq u_2 \leq (1,5) \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{1}{4}} \leq (u_2)^{\frac{1}{4}} \leq (1,5)^{\frac{1}{4}} \quad \text{الحالة (ب):}$$

$$\Leftrightarrow 0,25 \leq 0,84 \leq g_1(u) \leq 1,11 \leq 1,2$$

$$g_1(u) \in [0,25 ; 1,2] \quad \text{أي :}$$

$$\bullet (0,25) \leq u_1 \leq (1,2)$$

$$\Leftrightarrow 1,25 \leq u_1 + 1 \leq 2,2 \Leftrightarrow \frac{1,25}{2} \leq \frac{u_1 + 1}{2} \leq \frac{2,2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1,25}{2}} \leq \sqrt{\frac{u_1 + 1}{2}} \leq \sqrt{\frac{2,2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0,25 \leq 0,79 \leq g_2(u) \leq 1,10 \leq 1,5$$

$$g_2(u) \in [0,5 ; 1,5] \quad \text{أي :}$$

$$G(D) \subset D \quad \text{وبالتالي :}$$

(2) الحالة (أ):

حسب شروط التقارب، فإن الصيغة المتكررة (أ) غير مناسبة

(لا تحقق التقارب) لأن : $G(D) \not\subset D$ $(0,25)$

الحالة (ب):

1- G معرفة ومستمرة في D لأن $G(D) \subset D$ $(0,25)$ حيثية مستمرة في D .

2 - حساب مصفوفة جاكوبي

$$J(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4u_2^{3/4}} \\ \frac{1}{4\sqrt{u_1+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

المصفوفة H = (h_{ij}) = $\sup_{(u_1, u_2) \in D} |J(u)|$

المصفوفة H = $\begin{pmatrix} 0 & 0,42045 \\ 0,31623 & 0 \end{pmatrix}$

حيث $\begin{cases} \sup_{u_2 \in [0,5,1]} \left| \frac{1}{4u_2^{3/4}} \right| = 0,42045 \\ \sup_{u_1 \in [0,5,1,2]} \left| \frac{1}{4\sqrt{u_1+1}} \right| = 0,31623 \end{cases}$

المصفوفة H = $\|H\|_1 = \max \sum |h_{ij}| = 0,42045$

و مصفوفة (2, 1) فان شروط التقارب (التي) و (2, 1) فان شروط التقارب (التي) و (2, 1) فان شروط التقارب (التي)

(3) مصفوفة التقارب الأول : $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \in D$

مصفوفة التقارب (التي) و (2, 1) فان شروط التقارب (التي) و (2, 1) فان شروط التقارب (التي)

$X^{(n+1)} = G(X^{(n)}) = \begin{pmatrix} [u_2^{(n)}]^{1/4} \\ \sqrt{\frac{u_1^{(n)}+1}{2}} \end{pmatrix}$

المصفوفة التقارب الأول : $X^{(1)} = G(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} [u_2^{(0)}]^{1/4} \\ \sqrt{\frac{u_1^{(0)}+1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,5)^{1/4} \\ \sqrt{\frac{(1,2)+1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1067 \\ 1,0488 \end{pmatrix}$

3

حل التمرين (2) : 05/05

$$\begin{cases} y' = -y + t(t+2) \\ y(0) = 1, h = 0,1 \end{cases}$$

(1) حساب القيم العددية باستخدام طريقة Runge-Kutta

(0,25)

$$w_{i+1} = w_i + h F(t_i, w_i) \quad / \quad F(t_i, w_i) = -w_i + t_i(t_i+2)$$

$$w_{i+1} = w_i + h(-w_i + t_i^2 + 2t_i) = (1-h)w_i + h t_i^2 + 2h t_i$$

$$= (1-h)w_i + h(h)^2 + 2h(h) = (1-h)w_i + h^3 i^2 + 2h^2 i$$

$$= (1-0,1)w_i + (0,1)^3 i^2 + 2(0,1)^2 i \quad (0,75)$$

$$w_{i+1} = 0,9 w_i + 0,001 i^2 + 0,02 i$$

(2) حساب الحل التقريبي w_4

$$i=0: w_1 = 0,9 w_0 + 0,001(0)^2 + 0,02(0) = 0,9 \times (1) = 0,9 \quad (0,25)$$

$$i=1: w_2 = 0,9 w_1 + 0,001(1)^2 + 0,02(1) = 0,9(0,9) + 0,001 + 0,02 = 0,81 \quad (0,25)$$

$$i=2: w_3 = 0,9 w_2 + 0,001(2)^2 + 0,02(2) = 0,9(0,81) + 0,004 + 0,04 = 0,7919 \quad (0,25)$$

• حساب طريقة Runge-Kutta من الدرجة 4 (RK4)

$$w_{i+1}^{(p)} = w_i + \frac{h}{24} (55 f_i - 59 f_{i+1} + 37 f_{i+2} - 9 f_{i+3}) \quad (0,25)$$

$$i=3: w_4^{(p)} = w_3 + \frac{h}{24} (55 f_3 - 59 f_2 + 37 f_1 - 9 f_0)$$

$$f_0 = f(t_0; w_0) = f(0; 1) = -w_0 + t_0(t_0+2) = -1,0 + 0(0+2) = -1,00 \quad (0,25)$$

$$f_1 = f(t_1; w_1) = f(0,1; 0,9) = -w_1 + t_1(t_1+2) = -0,9 + 0,1(0,1+2) = -0,69 \quad (0,25)$$

$$f_2 = f(t_2; w_2) = f(0,2; 0,81) = -w_2 + t_2(t_2+2) = -0,81 + 0,2(0,2+2) = -0,391 \quad (0,25)$$

$$f_3 = f(t_3; w_3) = f(0,3; 0,7919) = -w_3 + t_3(t_3+2) = -0,7919 + 0,3(0,3+2) = -0,1019 \quad (0,25)$$

$$w_4^{(p)} = 0,7919 + \frac{0,1}{24} [55(-0,1019) - 59(-0,391) + 37(-0,69) - 9(-1)]$$

$$= 0,7919 + \frac{0,1}{24} [-5,6045 + 23,069 - 25,53 + 9] = 0,795794 \quad (0,25)$$

$$w_4^{(p)} = 0,795794$$

• حساب طريقة Runge-Kutta من الدرجة 3 (RK3)

$$w_{i+1}^{(c)} = w_i + \frac{h}{24} [9 f(t_{i+1}, w_{i+1}^{(p)}) + 19 f_i - 5 f_{i+1} + f_{i+2}] \quad (0,25)$$

$$i=3: w_4^{(c)} = w_3 + \frac{h}{24} [9 f(t_4, w_4^{(p)}) + 19 f_3 - 5 f_2 + f_1] \quad (0,25)$$

$$f(t_4, w_4^{(p)}) = -w_4^{(p)} + t_4(t_4+2) = -0,795794 + 0,4(0,4+2) = 0,164206$$

4] $w_4^{(0)} = 0,7919 + \frac{0,1}{24} [9(0,164206) + 19(-0,1019) - 5(-0,391) + (-0,69)]$
 $\textcircled{0,5} = 0,7919 + \frac{0,1}{24} [1,477854 - 1,9361 + 1,955 - 0,69]$
 $= 0,7919 + 0,003361475 =$
 $= 0,795261$: مسألة التفاضل عند $t=0,4$ (3)

$$E_a = |y(t_4) - w_4^{(0)}|$$

$$y(t_4) = (0,4)^2 + e^{-0,4} = 0,16 + 0,670320 = 0,830320 \textcircled{0,25}$$

$$E_a = |0,830320 - 0,795261| = 0,035059 \textcircled{0,25}$$

طريقة الثالث : 05/05

$$D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < +\infty\} \quad (1)$$

$$\left| \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial (y+t)}{\partial y} \right| = 1 \textcircled{0,25}$$

- الدالة F تحقق شرط ليبشيتز ($L=1 > 0$) $\textcircled{0,25}$
- كون الدالة F معرفة ومستمرة على المجال D $\textcircled{0,25}$
- حسب نظرية كوشي - ليبشيتز فإن المسألة (3) تقبل حلاً فريداً $\textcircled{0,25}$

$$(2) \text{ طريقة أويلر : } \begin{cases} w_{i+1} = w_i + h F(t_i, w_i) \\ w_0 = 1 \end{cases} \textcircled{0,25}$$

$$w_{i+1} = w_i + 0,1 (w_i + t_i) = w_i + 0,1 (w_i + 0,1i) = (1+0,1)w_i + 0,01i$$

$$w_{i+1} = 1,1 w_i + 0,01i \textcircled{0,25}$$

تفاضل المتتابعات : $i=0: w_1 = 1,1 w_0 + 0,01(0) = 1,1 \times 1 = 1,1 \textcircled{0,25}$

$i=1: w_2 = 1,1 w_1 + 0,01(1) = 1,1(1,1) + 0,01 = 1,22 \textcircled{0,25}$

$i=2: w_3 = 1,1 w_2 + 0,01(2) = 1,1(1,22) + 0,02 = 1,362 \textcircled{0,25}$

(3) مسألة التفاضل عند $t=0,2$

$$E_a = |y(t_2) - w_2|$$

$$y(t_2) = y_3(0,2) = 2e^{0,2} - 0,2 - 1 = 1,242806 \textcircled{0,25}$$

$$E_a = |1,242806 - 1,220| = 0,022806 \textcircled{0,25}$$

(4) مسألة التفاضل عند $t=0,2$

$$E_t = |y(t_2) - w_2| \quad \begin{cases} y'(t) = 2e^t - 1 \\ y''(t) = 2e^t \end{cases} \textcircled{0,25}$$

$$= \frac{hM}{2L} (e^{Lt_i} - 1) \quad \textcircled{0,25}$$

$$M = \max_{t \in [0,2]} |y''(t)| \Rightarrow M = 2e^{1,2} \textcircled{0,25}$$

$$E_t = (0,1 \times 2e) / 2(1) \times (e^{1,2} - 1) = 0,060184 \cdot E_a \ll E_t \textcircled{0,25}$$

5

055/05,5 : حل التمرين 4

$$\begin{cases} 2I_1 + 6[I_1 - I_2] + 2I_1' = 12 \dots (1) \\ \frac{1}{0,5} \int I_2(t) dt + 4I_2 + 6[I_2 - I_1] = 0 \dots (2) \end{cases}$$

(1) المعادلات التفاضلية $F_2(t, I_1, I_2) \rightarrow F_1(t, I_1, I_2)$

$$I_1' = -4I_1 + 3I_2 + 6 \quad \text{من المعادلة (1) لدينا}$$

$$F_1(t, I_1, I_2) = -4I_1 + 3I_2 + 6 \quad \text{دفع}$$

بالاشتقاق المعادلة (2)، نحصل على:

$$2I_2 + 4I_2' + 6[I_2' - I_1'] = 0 \Leftrightarrow 2I_2 + 4I_2' + 6I_2' - 6I_1' = 0$$

$$\Leftrightarrow 10I_2' = 6I_1' - 2I_2 \Leftrightarrow I_2' = 0,6I_1' - 0,2I_2 \quad (3)$$

نعوض قيمة I_1' في المعادلة (3)، نحصل على:

$$I_2' = 0,6(-4I_1 + 3I_2 + 6) - 0,2I_2 \Leftrightarrow I_2' = -2,4I_1 + 1,6I_2 + 3,6$$

$$F_2(t, I_1, I_2) = -2,4I_1 + 1,6I_2 + 3,6 \quad \text{دفع}$$

نطبق طريقة رونج كوتا من الدرجة 4 (RK4) لنظام (1)-(2) مع $h=0,1$ ، حيث:

$$w_{1,0} = I_1(0) = 0 \quad \text{و} \quad w_{2,0} = I_2(0) = 0$$

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}(K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i}) \quad (0,24)$$

$$K_{1,i} = h F_1(t_j, I_{1,j}, I_{2,j}) \quad (0,25)$$

$$K_{2,i} = h F_1(t_j + \frac{h}{2}, I_{1,j} + \frac{1}{2}K_{1,1}, I_{2,j} + \frac{1}{2}K_{1,2}) \quad (0,26)$$

$$K_{3,i} = h F_1(t_j + \frac{h}{2}, I_{1,j} + \frac{1}{2}K_{2,1}, I_{2,j} + \frac{1}{2}K_{2,2}) \quad (0,26)$$

$$K_{4,i} = h F_1(t_j + h, I_{1,j} + K_{3,1}, I_{2,j} + K_{3,2}) \quad (0,28)$$

$$K_{1,1} = h F_1(t_0, I_{1,0}, I_{2,0}) = 0,1 F_1(0; 0; 0) = 0,1(-4(0) + 3(0) + 6) = 0,6 \quad (0,26)$$

$$K_{1,2} = h F_2(t_0, I_{1,0}, I_{2,0}) = 0,1 F_2(0; 0; 0) = 0,1(-2,4(0) + 1,6(0) + 3,6) = 0,36 \quad (0,27)$$

$$K_{2,1} = h F_1(t_0 + \frac{0,1}{2}, I_{1,0} + \frac{1}{2}K_{1,1}, I_{2,0} + \frac{1}{2}K_{1,2}) = 0,1 F_1(0,05; 0,3; 0,18) = 0,534 \quad (0,28)$$

$$K_{2,2} = h F_2(t_0 + \frac{0,1}{2}, I_{1,0} + \frac{1}{2}K_{1,1}, I_{2,0} + \frac{1}{2}K_{1,2}) = 0,1 F_2(0,05; 0,3; 0,18) = 0,3168 \quad (0,28)$$

$$K_{3,1} = h F_1(t_0 + \frac{0,1}{2}, I_{1,0} + \frac{1}{2} K_{2,1}, I_{2,0} + \frac{1}{2} K_{2,2}) = 0,1 F_1(0,05; 0,267; 0,1584) \\ = 0,54072 \quad (0,25)$$

$$K_{3,2} = h F_2(0,05; 0,267; 0,1584) = 0,321264 \quad (0,25)$$

$$K_{4,1} = h F_1(t_0 + 0,1, I_{1,0} + \frac{1}{2} K_{3,1}, I_{2,0} + \frac{1}{2} K_{3,2}) = 0,1 F_1(0,1; 0,54072; 0,321264) \\ = 0,4800912 \quad (0,25)$$

$$K_{4,2} = h F_2(0,1; 0,54072; 0,321264) \\ = 0,28162944 \quad (0,25)$$

∴ aia 9

$$w_{1,1} = w_{1,0} + \frac{1}{6} (K_{1,1} + 2K_{2,1} + 2K_{3,1} + K_{4,1}) \\ = 0 + \frac{1}{6} (0,6 + 2(0,534) + 2(0,54072) + 0,4800912) \\ = 0,5382552 \quad (0,5)$$

$$w_{2,1} = w_{2,0} + \frac{1}{6} (K_{1,2} + 2K_{2,2} + 2K_{3,2} + K_{4,2}) \\ = 0 + \frac{1}{6} (0,36 + 2(0,3168) + 2(0,321264) + 0,28162944) \\ = 0,3196263 \quad (0,5)$$

$$\begin{cases} I_1(0,1) \approx w_{1,1} = 0,5382552 \\ I_2(0,1) \approx w_{2,1} = 0,3196263 \end{cases} \quad \therefore \text{aia}$$

